В сб. "Алгебра, дифференциальные уравнения и теория вероятностей", (Труды Коми НЦ УрО РАН, N151). Сыктывкар, 1997, с. 30–43.

Квантовые симплектические группы Кэли–Клейна $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$.

Н.А.Громов, И.В.Костяков, В.В.Куратов

Изучены квантовые симплектические группы $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$, как алгебры Хопфа некоммутативных функций над алгебрами с нильпотентными образующими. Исследованы двойственные к $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$ алгебры $sp_q(n;\mathbf{j})$ и установлен изоморфизм между квантовой деформацией универсальной обертывающей алгеброй $U_z(sp(n;\mathbf{j}))$ и алгеброй $sp_q(n;\mathbf{j})$.

1 Введение

В данной работе предлагается способ описания квантовых симплектических групп, отвечающих неполупростым группам. Известно, что группы движений симплектических пространств Кэли–Клейна, среди которых есть некомпактные и неполупростые, можно описать единым образом [2], вводя в симплектическую группу $Sp(n)$ параметры $j_k, (j_k = 1, \iota_k$, где $\iota_k \neq 0,\ \iota_k^2 = 0,\ \iota_k\iota_m = \iota_m\iota_k,\ m \neq k)$. Полученный таким образом набор групп обозначим $Sp(n;\mathbf{j})$, $\mathbf{j} = j_1, j_2, \ldots$, а операцию введения параметров j_k будем называть введением структуры Кэли–Клейна на группе. Определяя структуру Кэли–Клейна на квантовой группе, мы получаем описание квантовых некомпактных и неполупростых групп. Мы придерживаемся обозначений, введенных в [1].

2 Симплектическая группа $Sp(n;\mathbf{j})$

Рассмотрим пространство $\mathrm{R_n}(\mathbf{j})$, которое получается из n–мерного пространства Евклида $\mathrm{R_n}$, отображением

$$\psi : \mathrm{R^n} \to \mathrm{R^n}(\mathbf{j}),$$

$$\psi\hat{x}_k = x_k J_k, \quad \psi\hat{x}_{k'} = x_{k'} J_k, \tag{1}$$

$$J_k = \prod_{m=1}^{k-1} j_m, \quad k' = 2n+1-k, \;\; k = 1,2...n.$$

Симплектическую группу Кэли–Клейна $Sp(n;\mathbf{j})$ определим как группу преобразований $2n$–мерного пространства $R_n(\mathbf{j}) \otimes R_n(\mathbf{j})$, сохраняющих билинейную форму

$$[x,y] = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k'} - x_{k'} y_k) J_k^2. \tag{2}$$

Здесь декартовы координаты $x_k, y_k, \;\; k = 1,2,\ldots,n$ принадлежат первому, а $x_{k'}, y_{k'}$,— второму сомножителю в прямом произведении пространств. Обозначим матричную реализацию этой группы через $T(\mathbf{j})$. Тогда действие группы $Sp(n;\mathbf{j})$ на пространстве $R_n(\mathbf{j}) \otimes R_n(\mathbf{j})$ задается формулой: $x'_i = \sum_m (T(\mathbf{j}))_{im} x_m$. Структура расстановки параметров $\mathbf{j}$ в матрице $T(\mathbf{j})$ выглядит так

$$T(j) = \begin{pmatrix} t_{11} & j_1 t_{12} & ... & j_1 t_{1,2n-1} & t_{1,2n} \\ j_1 t_{21} & t_{22} & ... & t_{2,2n-1} & j_1 t_{2,2n} \\ j_1 j_2 t_{31} & j_2 t_{32} & ... & j_2 t_{3,2n-1} & j_1 j_2 t_{3,2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ j_1 j_2 t_{2n-2,1} & j_2 t_{2n-2,2} & ... & j_2 t_{2n-2,2n-1} & j_1 j_2 t_{2n-2,2n} \\ j_1 t_{2n-1,1} & t_{2n-1,2} & ... & t_{2n-1,2n-1} & j_1 t_{2n-1,2n} \\ t_{2n,1} & j_1 t_{2n,2} & ... & j_1 t_{2n,2n-1} & t_{2n,2n} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

или

$$T_{ir} = J_m^k t_{ir}, \quad k = \begin{cases} i, & i \le n; \\ 2n+1-i, & i > n; \end{cases} \; m = \begin{cases} r, & j \le n; \\ 2n+1-r, & j > n, \end{cases}$$

$$J_m^k = \prod_{n=min(k,m)}^{max(k,m)-1} j_n.$$

Элементы матрицы $T(\mathbf{j})$ удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$T^t(\mathbf{j}) C_0 T(\mathbf{j}) = C_0, \tag{4}$$

где матрица C_0 равна $(C_0)_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}, \;\; \varepsilon_i = 1$ если $i = 1,2\ldots n$ и $\varepsilon_i = -1$ для $i = n+1,\ldots,2n$.

2.1 Симплектическая алгебра $sp(n;\mathbf{j})$

Опишем теперь алгебру $sp(n;\mathbf{j})$ симплектической группы $Sp(n;\mathbf{j})$. Как известно, можно ограничиться описанием базиса Шевалле и матрицы Картана для этой алгебры. Общий элемент базиса Шевалле $sp(n;\mathbf{j})$ выглядит так:

$$H=\left(\begin{array}{cccccc} h_1 & j_1x_1^+ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ j_1x_1^- & h_2 & j_2x_2^+ & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & j_2x_2^+ & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -j_2x_2^- & -h_2 & -j_1x_1^+ \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -j_1x_1^- & -h_1 \end{array}\right). \tag{5}$$

Выберем генераторы алгебры $sp(n;\mathbf{j})$ следующим образом:

$$\begin{array}{ll} H_i=e_{ii}-e_{i'i'}-e_{i+1,i+1}+e_{(i+1)',(i+1)'}, & H_n=e_{nn}-e_{n',n'}, \\ X_i^+=j_i(e_{i,i+1}-e_{(i+1)',i'}), & X_i^-=j_i(e_{i+1,i}-e_{(i)',(i+1)'}), \\ X_n^+=j_ne_{n,n+1}, & X_n^-=j_ne_{n+1,n}, \end{array} \tag{6}$$

где $(e_{rs})_{km}=\delta_{rk}\delta_{sm}, \quad i=1,\ldots,n-1$. Коммутационные соотношения для базиса Шевалле выглядят так

$$[H_r,X_s^{\pm}]=\pm A_{rs}X_s^{\pm}, \quad [X_r^+,X_s^-]=\delta_{rs}j_i^2H_s, \tag{7}$$

где A_{rs} – матрица Картана : $A_{rr}=2,\ A_{r,r-1}=A_{r-2,r-1}=-1,\ A_{n-1,n}=-2$. В случае $j_k=\iota_k,\ j_k^2=0,\ k=k_1,\ldots,k_r$, мы получаем неполупростую алгебру S, являющуюся полупрямой суммой: $S=S_0\oplus B$, где $S_0=S_{k_1}\oplus\ldots\oplus S_{k_r}$ и абелевы алгебры S_{k_i} натянуты на генераторы $H_{k_i},X_{k_i}^{\pm}$ а B – на генераторы $H_i,X_i^{\pm},\ i\neq k_1,\ldots,k_r$.

3 Структура Кэли–Клейна на квантовой симплектической группе $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$

Аналогично классическому случаю, определим $2n$–мерное квантовое симплектическое пространство Кэли–Клейна $Sp_q^N(\mathrm{C};\mathbf{j})$ с базисом $\hat{x}_k$ и коммутационными соотношениями

$$\hat{R}_q(\hat{x}\otimes\hat{x})=q(\hat{x}\otimes\hat{x}), \tag{8}$$

с помощью отображения

$$\psi\hat{x}_k=x_kJ_k, \quad \psi\hat{x}_{k'}=x_{k'}J_k, \quad k=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Здесь матрица R_q равна

$$\begin{aligned} R_q &= q\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i'}}^{2n} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j,j'}}^{2n} e_{ii}\otimes e_{jj} + q^{-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i'}}^{2n} e_{i'i'}\otimes e_{ii} + \\ &+\lambda\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{2n} e_{ij}\otimes e_{ji} - \lambda\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{2n} q^{\rho_i-\rho_j}\varepsilon_i\varepsilon_j e_{ij}\otimes e_{i'j'} \end{aligned} \tag{10}$$

где $\lambda = q - q^{-1}$ и $(\rho_1,\ldots,\rho_{2n}) = (n, n-1,\ldots,1,-1,\ldots,-n)$, $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i=1,\ldots,n \\ -1, & i=n+1,\ldots,2n \end{cases}$. На квантовом симплектическом пространстве $Sp_q^N(\mathrm{C};\mathbf{j})$ определено "действие"δ': $Sp_q^N(\mathrm{C};\mathbf{j}) \to Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))\otimes Sp_q^N(\mathrm{C};\mathbf{j})$ квантовой группы $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$, задаваемое формулой $\delta'(\hat{x}) = T(\mathbf{j})\dot{\otimes}\hat{x}$ и сохраняющее билинейную форму $\hat{x}^t\dot{\otimes}C\hat{x}$: $m_{13}(\delta'\otimes\delta')(\hat{x}^t\dot{\otimes}C\hat{x}) = 1\otimes\hat{x}^t\dot{\otimes}C\hat{x}$, где $m : Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))\otimes Fun(Sp_q(n;\mathbf{j})) \to Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$ – отображение умножения. Структура расстановки параметров $\mathbf{j}$ при некоммутативных генераторах t_{ik} аналогична классическому случаю (3). Коммутационные и дополнительные соотношения для генераторов t_{ik} определяются так:

$$R_q T_1(\mathbf{j}) T_2(\mathbf{j}) = T_2(\mathbf{j}) T_1(\mathbf{j}) R_q, \tag{11}$$

$$T(\mathbf{j}) C T^t(\mathbf{j}) C^{-1} = C T^t(\mathbf{j}) C^{-1} T(\mathbf{j}) = I, \tag{12}$$

здесь $T_1(\mathbf{j}) = T(\mathbf{j})\otimes I$, $\quad T_2(\mathbf{j}) = I\otimes T(\mathbf{j})$, $\quad C = C_0 q^{\rho}$, $\rho = \mathrm{diag}(n, n-1,\ldots,1,-1,\ldots,-n)$. Копроизведение, коединица и антипод равны, соответственно:

$$\begin{aligned} \triangle(T(\mathbf{j})) = T(\mathbf{j})\dot{\otimes} T(\mathbf{j}), \quad \epsilon(T(\mathbf{j})) = I, \\ S(T(\mathbf{j})) = C T^t(\mathbf{j}) C^{-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

3.1 Квантовая алгебра $sp_q(n;\mathbf{j})$

Двойственную к $Fun(Sp_q(n;\mathbf{j}))$ квантовую алгебру $sp_q(n;\mathbf{j})$ определим соотношениями

$$(L^{(\pm)}(\mathbf{j}), T_1(\mathbf{j})\ldots T_k(\mathbf{j})) = R_1^{(\pm)}\ldots R_k^{(\pm)}.$$

где $T_i = I\otimes\ldots\otimes\underbrace{T}_{i}\otimes\ldots\otimes I$, а матрицы $R_i^{\pm}$ действуют нетривиально только в сомножителях с номерами 0 и i тензорного произведения $\underbrace{\mathrm{C^n}\otimes\ldots\otimes\mathrm{C^n}}_{k+1}$ и совпадают там соответственно с матрицами

$$R^{(-)} = R_q^{-1} = R_{q^{-1}}, \quad R^{(+)} = P R_q P, \quad P u\otimes v = v\otimes u. \tag{14}$$

Образующие алгебры $sp_q(n;\mathbf{j})$ имеют вид

$$L^{(+)}(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} l_{11}^{+} & j_1^{-1}l_{12}^{+} & j_1^{-1}j_2^{-1}l_{13}^{+} & \cdots & l_{1N}^{+} \\ 0 & l_{22}^{+} & j_2^{-1}l_{23}^{+} & \cdots & j_1^{-1}l_{2N}^{+} \\ 0 & 0 & \cdots & l_{N-1,N-1}^{+} & j_1^{-1}l_{N-1,N}^{+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{N,N}^{+} \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

$$L^{(-)}(j) = \begin{pmatrix} l_{11}^{-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_1^{-1}l_{21}^{-} & l_{22}^{-} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ j_1^{-1}l_{N-1,1}^{-} & j_2^{-1}l_{N-1,2}^{-} & \cdots & & 0 \\ l_{N1}^{-} & j_1^{-1}l_{N2}^{-} & j_1^{-1}j_2^{-1}l_{N3}^{-} & \cdots & l_{NN}^{-} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Коммутационные и дополнительные соотношения для образующих алгебры $sp_q(n;\mathbf{j})$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} R^{(+)}L_1^{(\varepsilon)}(j)L_2^{(\varepsilon)}(j) &= L_2^{(\varepsilon)}(j)L_1^{(\varepsilon)}(j)R^{(+)}, && (17)\\ R^{(+)}L_1^{(+)}(j)L_2^{(-)}(j) &= L_2^{(-)}(j)L_1^{(+)}(j)R^{(+)}, && (18)\\ L(j)C^tL^t(j)(C^{-1})^t &= C^tL^t(j)(C^{-1})^tL(j) = I, && (19) \end{aligned}$$

где $L_1^{(\varepsilon)}(\mathbf{j}) = L^{(\varepsilon)}(\mathbf{j}) \otimes I, \quad L_2^{(\varepsilon)}(\mathbf{j}) = I \otimes L^{(\varepsilon)}(\mathbf{j}), \quad \varepsilon = \pm$. Копроизведение и коединица определяются обычным образом

$$\triangle(L^{\pm}(\mathbf{j})) = L^{\pm}(\mathbf{j}) \dot{\otimes} L^{\pm}(\mathbf{j}), \quad \epsilon(L^{\pm}(\mathbf{j})) = I. \qquad (20)$$

Квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_z(sp(n;\mathbf{j}))$ алгебры $(sp(n;\mathbf{j}))$ назовем алгебру с образующими $X_i^{\pm}$, H_i, $i = 1,\dots,n$ и соотношениями

$$\begin{aligned} &[H_s, H_p] = 0, && [H_s, X_p^{\pm}] = \pm(\alpha_s,\alpha_p)X_p^{\pm}, \\ &\left[X_s^{+}, X_p^{-}\right] = \delta_{sp}j_p^2\frac{\sinh(zH_p)}{\sinh(z)} && p, s = 1,\dots,n, \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}_{z_i} z_i^{-\frac{k(m-k)}{2}}(X_i^{\pm})^kX_s^{\pm}(X_i^{\pm})^{m-k} = 0 \qquad (22)$$

при $i \neq s$, где $m = 1 - 2\frac{(\alpha_i,\alpha_s)}{(\alpha_s,\alpha_s)}$, $z_i = e^{z(\alpha_i,\alpha_s)}$,

$$\binom{m}{k}_z = \frac{(z^m-1)(z^{(m-1)}-1)\dots(z^{(m-k+1)}-1)}{(z^k-1)(z^{(k-1)}-1)\dots(z-1)}.$$

При $z \to 0$ $U_z(sp(n;\mathbf{j}))$ переходит в универсальную обертывающую алгебру $U(sp(n;\mathbf{j}))$ алгебры Ли $sp(n;\mathbf{j})$. Изоморфизм между алгеброй $sp_q(n;\mathbf{j})$ и квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_z(sp(n;\mathbf{j}))$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{ii}^{+} = e^{z\tilde{H}_i}, &\quad l_{nn}^{+} = e^{z\tilde{H}_n}, \\ l_{i,i+1}^{+} = \lambda q^{-\frac{1}{2}} X_1^{+} e^{\frac{z}{2}(\tilde{H}_i+\tilde{H}_{i+1})}, &\quad l_{i+1,i}^{-} = \lambda q^{\frac{1}{2}} X_1^{-} e^{-\frac{z}{2}(\tilde{H}_i+\tilde{H}_{i+1})} \\ l_{n,n+1}^{+} = \lambda X_n^{+}, &\quad l_{n+1,n}^{-} = \lambda X_n^{-}, \\ H_i = \tilde{H}_i - \tilde{H}_{i+1}, &\quad H_n = 2\tilde{H}_n. \end{aligned} \tag{23}$$

Уравнения (22) определяют структуру квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_z(sp(n;\mathbf{j}))$. В случае $j_i = \iota_i$ мы получаем новую универсальную обертывающую алгебру соответствующей новой неполупростой алгебре.

4 Пример: симплектическая алгебра sp(2)

В случае $n = 2$ общий элемент алгебры $sp(2)$ имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1 & x_1^{+} & x_3^{+} & x_4^{+} \\ x_1^{-} & \tilde{h}_2 & x_2^{+} & x_3^{+} \\ x_3^{-} & x_2^{-} & -\tilde{h}_1 & -x_1^{+} \\ x_4^{-} & x_3^{-} & -x_1^{-} & -\tilde{h}_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

или

$$\begin{aligned} L = {} & h_1 H_1 + h_2 H_2 + x_1^{+} X_1^{+} + x_2^{+} X_2^{+} + x_1^{-} X_1^{-} + x_2^{-} X_2^{-} + \\ & x_3^{-} X_3^{-} + x_4^{-} X_4^{-} + x_3^{+} X_3^{+} + x_4^{+} X_4^{+}, \end{aligned} \tag{25}$$

где генераторы алгебры sp(2) выбраны в виде

$$\begin{array}{ll} H_1 = e_{11} - e_{44} - e_{22} + e_{33}, & H_2 = 2(e_{22} - e_{33}), \\ X_1^{+} = e_{12} - e_{34}, & X_1^{-} = e_{21} - e_{43}, \\ X_2^{+} = \sqrt{2} e_{23}, & X_2^{-} = \sqrt{2} e_{32}, \\ X_3^{+} = e_{13} + e_{24} = \frac{1}{2}\left[X_1^{+}, X_2^{+}\right], & X_3^{-} = e_{31} + e_{42} = \frac{1}{2}\left[X_2^{-}, X_1^{-}\right], \\ X_4^{+} = \sqrt{2} e_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_1^{+}, X_3^{+}\right], & X_4^{-} = \sqrt{2} e_{41} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_3^{-}, X_1^{-}\right]. \end{array} \tag{26}$$

Коммутационные соотношения для базиса Шевалле алгебры sp(2) выглядят так

$$
\begin{array}{ll}
\left[H_1, X_1^{\pm}\right] = \pm 2X_1^{\pm}, & \left[H_1, X_2^{\pm}\right] = \mp 2X_2^{\pm}, \\
\left[H_2, X_1^{\pm}\right] = \mp 2X_1^{\pm}, & \left[H_2, X_2^{\pm}\right] = \pm 4X_2^{\pm}, \\
\left[X_1^{+}, X_1^{-}\right] = H_1, & \left[X_2^{+}, X_2^{-}\right] = H_2, \\
\left[X_1^{+}, X_2^{-}\right] = 0, & \left[X_2^{+}, X_1^{-}\right] = 0,
\end{array} \tag{27}
$$

для остальных генераторов

$$
\begin{array}{ll}
\left[H_1, X_3^{\pm}\right] = 0, & \left[H_2, X_3^{\pm}\right] = \pm 2X_3^{\pm}, \\
\left[X_3^{+}, X_3^{-}\right] = H_1 + H_2, & \left[X_4^{+}, X_4^{-}\right] = 2H_1 + H_2, \\
\left[H_2, X_4^{\pm}\right] = 0, & \left[H_1, X_4^{\pm}\right] = \pm 2X_4^{\pm}, \\
\left[X_2^{\pm}, X_3^{\mp}\right] = \pm\sqrt{2}X_1^{\mp}, & \left[X_1^{\pm}, X_4^{\mp}\right] = \mp\sqrt{2}X_3^{\mp}, \\
\left[X_1^{\pm}, X_3^{\mp}\right] = \mp\sqrt{2}X_2^{\mp}, & \left[X_1^{\pm}, X_4^{\pm}\right] = 0, \\
\left[X_2^{\pm}, X_3^{\pm}\right] = 0, & \left[X_1^{\pm}, X_3^{\pm}\right] = \pm\sqrt{2}X_4^{\pm}.
\end{array} \tag{28}
$$

Для симплектической алгебры sp(2;j) общий элемент имеет вид

$$
L(j) = \begin{pmatrix}
\tilde{h}_1 & jx_1^{+} & jx_3^{+} & x_4^{+} \\
jx_1^{-} & \tilde{h}_2 & x_2^{+} & jx_3^{+} \\
jx_3^{-} & x_2^{-} & -\tilde{h}_1 & -jx_1^{+} \\
x_4^{-} & jx_3^{-} & -jx_1^{-} & -\tilde{h}_2
\end{pmatrix}, \tag{29}
$$

или

$$
\begin{aligned}
L(j) \;\; = \;\; & h_1H_1 + h_2H_2 + x_1^{+}X_1^{+} + x_2^{+}X_2^{+} + x_1^{-}X_1^{-} + x_2^{-}X_2^{-} + \\
& x_3^{-}X_3^{-} + x_4^{-}X_4^{-} + x_3^{+}X_3^{+} + x_4^{+}X_4^{+},
\end{aligned} \tag{30}
$$

где генераторы алгебры sp(2;j)

$$
\begin{array}{ll}
H_1 = e_{11} - e_{44} - e_{22} + e_{33}, & H_2 = 2(e_{22} - e_{33}), \\
X_1^{+} = j(e_{12} - e_{34}), & X_1^{-} = j(e_{21} - e_{43}), \\
X_2^{+} = \sqrt{2}e_{23}, & X_2^{-} = \sqrt{2}e_{32}, \\
X_3^{+} = j(e_{13} + e_{24}) = \left[X_1^{+}, X_2^{+}\right], & X_3^{-} = j(e_{31} + e_{42}) = \frac{1}{2}\left[X_2^{-}, X_1^{-}\right], \\
X_4^{+} = \sqrt{2}e_{14}, & X_4^{-} = \sqrt{2}e_{41}.
\end{array} \tag{31}
$$

Коммутационные соотношения для базиса Шевалле алгебры sp(2;j) выглядят так

$$\begin{aligned}
&\left[H_1, X_1^{\pm}\right] = \pm 2X_1^{\pm}, && \left[H_1, X_2^{\pm}\right] = \mp 2X_2^{\pm},\\
&\left[H_2, X_1^{\pm}\right] = \mp 2X_1^{\pm}, && \left[H_2, X_2^{\pm}\right] = \pm 4X_2^{\pm},\\
&\left[X_1^{+}, X_1^{-}\right] = j^2 H_1, && \left[X_2^{+}, X_2^{-}\right] = H_2,\\
&\left[X_1^{+}, X_2^{-}\right] = 0, && \left[X_2^{+}, X_1^{-}\right] = 0,
\end{aligned} \tag{32}$$

для остальных генераторов

$$\begin{aligned}
&\left[H_1, X_3^{\pm}\right] = 0, && \left[H_2, X_3^{\pm}\right] = \pm 2X_3^{\pm},\\
&\left[X_3^{+}, X_3^{-}\right] = j^2(H_1 + H_2), && \left[X_4^{+}, X_4^{-}\right] = 2H_1 + H_2,\\
&\left[H_2, X_4^{\pm}\right] = 0, && \left[H_1, X_4^{\pm}\right] = \pm 2X_4^{\pm},\\
&\left[X_2^{\pm}, X_3^{\mp}\right] = \pm\sqrt{2}X_1^{\pm}, && \left[X_1^{\pm}, X_4^{\mp}\right] = \mp\sqrt{2}X_3^{\mp},\\
&\left[X_1^{\pm}, X_3^{\mp}\right] = \mp j^2 X_2^{\mp}, && \left[X_1^{\pm}, X_4^{\pm}\right] = 0,\\
&\left[X_2^{\pm}, X_3^{\pm}\right] = 0, && \left[X_1^{\pm}, X_3^{\pm}\right] = \pm\sqrt{2}j^2 X_4^{\pm}.
\end{aligned} \tag{33}$$

При $j = \iota$, $j^2 = 0$ получаем неполупростую алгебру S, являющуюся полупрямой суммой: $S = S_0 \Subset B$, где абелева алгебра S_0 натянута на генераторы $H_1, X_1^{\pm}$, а B – на генераторы $H_2,\ X_2^{\pm},\ X_3^{\pm},\ X_4^{\pm}$.

5 Квантовая деформация универсальной обертывающей алгебры $U_z(sp(2;j))$.

Построим квантовую универсальную обертывающую алгебру $U_z(sp(2;j))$. Образующие алгебры $U_z(sp(2))$ $H_i, X_i^{\pm}, i = 1, 2$, играющие роль квантового аналога базиса Шевалле, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0, && [H_i, X_j^{\pm}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)X_j^{\pm},\\
&\left[X_1^{+}, X_1^{-}\right] = j^2\frac{\sinh(zH_1)}{\sinh(z)}, && \left[X_2^{+}, X_2^{-}\right] = \frac{\sinh(zH_2)}{\sinh(z)}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь матрица Картана

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

простые положительные корни $\alpha_1 = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2},\ \alpha_2 = \mathbf{2e_2}$. Коумножение $\triangle$:

$$\triangle(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i,$$

$$\triangle(X_i^{\pm}) = X_i^{\pm} \otimes e^{-\frac{zH_i}{2}} + e^{\frac{zH_i}{2}} \otimes X_i^{\pm}, \qquad i = 1, 2,$$

антипод:

$$S(H_i) = -H_i, \quad S(X_i^{\pm}) = -e^{-z\frac{H_1+H_2}{2}} X_i^{\pm} e^{z\frac{H_1+H_2}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

6 Структура Кэли-Клейна на квантовых симплектических группах $Fun(Sp_q(2;j))$.

Напомним определение группы $Fun(Sp_q(2))$ [1]. Некоммутативные образующие $Fun(Sp_q(2))$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

подчиняются следующим коммутационным соотношениям

$$R_q T_1 T_2 = T_2 T_1 R_q, \tag{37}$$

где $T_1 = T \otimes I, \quad T_2 = I \otimes T$ и дополнительным соотношениям

$$TCT^tC^{-1} = CT^tC^{-1}T = I. \tag{38}$$

Здесь R-матрица задается формулой:

$$\begin{aligned} R_q \;\; = \;\; & q\sum_{i=1}^{2} e_{ii} \otimes e_{ii} - \lambda q^{-1}(e_{21} \otimes e_{34} + e_{43} \otimes e_{12}) + \lambda q^{-2} e_{32} \otimes e_{23} + \\ & \lambda \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{2} e_{ij} \otimes e_{ji} + \lambda q^{-4} e_{41} \otimes e_{14} + \lambda q^{-3}(e_{31} \otimes e_{24} + e_{42} \otimes e_{13}) + \\ & q^{-1}\sum_{i=1}^{2} e_{ii} \otimes e_{i'i'} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j,j'}}^{2} e_{ii} \otimes e_{jj}, \end{aligned} \tag{39}$$

или в явном виде
$R_q =$

$$
\begin{pmatrix}
q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{1}{q} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \lambda & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\dfrac{\lambda}{q} & \cdot & \cdot & \dfrac{1}{q} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\lambda}{q^3} & \cdot & \cdot & \zeta & \cdot & \cdot & \dfrac{1}{q} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \chi & \cdot & \cdot & \dfrac{\lambda}{q^3} & \cdot & \cdot & -\dfrac{\lambda}{q} & \cdot & \cdot & \dfrac{1}{q} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q
\end{pmatrix}, \qquad (40)
$$

где $\chi = \lambda(1+q^{-4}),\ \ \zeta = \lambda(1+q^{-2})$. Матрица C в (38) равна

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q^{-2} \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & -q & 0 & 0 \\ -q^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (41)
$$

Пусть $x_1, \ldots, x_4$ — образующие (некоммутативные аналоги декартовых координат) квантового 4-мерного симплектического пространства $Sp_q^4(\mathrm{C})$ с соотношениями

$$
\hat{R}_q(x \otimes x) = q(x \otimes x), \qquad (42)
$$

где $\hat{R}_q = PR_q$, $(\hat{R}_q)^{ik}_{mn} = (R_q)^{mk}_{in}$, $P(a \otimes b) = b \otimes a$. "Действие"$\delta$: $Sp_q^4(\mathrm{C}) \rightarrow Fun(Sp_q(2)) \otimes Sp_q^4(\mathrm{C})$ квантовой группы $Fun(Sp_q(2))$ на квантовом симплектическом пространстве $Sp_q^4(\mathrm{C})$, задаваемое формулой $\delta(x) = T \dot{\otimes} x$, т.е.

$$
\delta(x_i) = \sum_{k=1}^{4} t_{ik} \otimes x_k, \ \ i = 1, \ldots, 4, \qquad (43)
$$

сохраняет билинейную форму $x^t \dot{\otimes} Cx$.

Введем структуру Кэли-Клейна [2] на квантовой симплектической группе $Fun(Sp_q(2))$. Для этого , аналогично классическому случаю сделаем преобразование

$$\hat{x}_1 = x_1, \qquad \hat{x}_2 = jx_2, \qquad \hat{x}_3 = jx_3, \qquad \hat{x}_4 = x_4,$$

где параметр j может принимать значения $1, \iota$ [2], $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$ образуют базис квантового 4-мерного симплектического пространства Кэли—Клейна $Sp_q^4(\mathrm{C};\mathrm{j})$ с соотношениями

$$\hat{R}_q(\hat{x} \otimes \hat{x}) = q(\hat{x} \otimes \hat{x}). \tag{44}$$

В явном виде соотношения (44) выглядят следующим образом:

$$\hat{x}_1\hat{x}_2 = q\hat{x}_2\hat{x}_1,\ \hat{x}_1\hat{x}_3 = q\hat{x}_3\hat{x}_1,\ \hat{x}_2\hat{x}_4 = q\hat{x}_4\hat{x}_2,\ \hat{x}_3\hat{x}_4 = q\hat{x}_4\hat{x}_3,$$

$$\hat{x}_2\hat{x}_3 = q^2\hat{x}_3\hat{x}_2 + j^2\lambda\hat{x}_1\hat{x}_4, \qquad \hat{x}_4\hat{x}_1 = q^{-2}\hat{x}_1\hat{x}_4,$$
$$j^2\hat{x}_4\hat{x}_1 = j^2\hat{x}_1\hat{x}_4 + (q^{-2}-1)(j^2q^{-2}\hat{x}_1\hat{x}_4 + q^{-1}\hat{x}_2\hat{x}_3 - q\hat{x}_3\hat{x}_2).$$

Исходя из условия сохранения билинейной формы, параметр j в $Fun(Sp_q(2;j))$ "расставится"следующим образом :

$$T(j) = \begin{pmatrix} t_{11} & jt_{12} & jt_{13} & t_{14} \\ jt_{21} & t_{22} & t_{23} & jt_{24} \\ jt_{31} & t_{32} & t_{33} & jt_{34} \\ t_{41} & jt_{42} & jt_{43} & t_{44} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Коммутационные и дополнительные соотношения для образующих t_{ik} квантовой группы $Fun(Sp_q(2;j))$ задаются, соответственно,

$$R_qT_1(j)T_2(j) = T_2(j)T_1(j)R_q, \tag{46}$$

где $T_1(j) = T(j) \otimes I, \quad T_2(j) = I \otimes T(j)$ и

$$T(j)CT^t(j)C^{-1} = CT^t(j)C^{-1}T(j) = I. \tag{47}$$

Коумножение определяется обычным образом

$$\triangle(T(j)) = T(j)\dot{\otimes}T(j). \tag{48}$$

Коединица и антипод

$$\epsilon(T(j)) = I,$$

$$S(T(j)) = CT^t(j)C^{-1},$$

$$S(T(j)) = \begin{pmatrix} t_{44} & jq^{-1}t_{34} & -jq^{-3}t_{24} & -q^{-4}t_{14} \\ jqt_{43} & t_{33} & -q^{-2}t_{23} & -jq^{-3}t_{13} \\ -jq^3t_{42} & -q^2t_{32} & t_{22} & jq^{-1}t_{12} \\ -q^4t_{41} & -jq^3t_{31} & jqt_{21} & t_{11} \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

"Действие"δ': $Sp_q^4(\mathrm{C};\mathrm{j}) \to Fun(Sp_q(2;j)) \otimes Sp_q^4(\mathrm{C};\mathrm{j})$ квантовой группы $Fun(Sp_q(2;j))$ на квантовом симплектическом пространстве Кэли—Клейна $Sp_q^4(\mathrm{C};\mathrm{j})$, задаваемое формулой $\delta(\hat{x}) = T(j)\dot{\otimes}\hat{x}$, сохраняет билинейную форму $\hat{x}^t\dot{\otimes}C\hat{x}$.

7 Квантовая алгебра $sp_q(2;j)$

Рассмотрим двойственную к $Fun(Sp_q(2;j))$ квантовую алгебру $sp_q(2;j)$, определяемую соотношениями

$$(L^{(\pm)}(j), T_1(\mathbf{j})\dots T_k(\mathbf{j})) = R_1^{(\pm)}\dots R_k^{(\pm)}. \qquad (50)$$

Образующие алгебры $sp_q(2;j)$ имеют вид

$$L^{(+)}(j) = \begin{pmatrix} l_{11}^+ & j^{-1}l_{12}^+ & j^{-1}l_{13}^+ & l_{14}^+ \\ 0 & l_{22}^+ & l_{23}^+ & j^{-1}l_{24}^+ \\ 0 & 0 & l_{33}^+ & j^{-1}l_{34}^+ \\ 0 & 0 & 0 & l_{44}^+ \end{pmatrix}, \qquad (51)$$

$$L^{(-)}(j) = \begin{pmatrix} l_{11}^- & 0 & 0 & 0 \\ j^{-1}l_{21}^- & l_{22}^- & 0 & 0 \\ j^{-1}l_{31}^- & l_{32}^- & l_{33}^- & 0 \\ l_{41}^- & j^{-1}l_{42}^- & j^{-1}l_{43}^- & l_{44}^- \end{pmatrix}. \qquad (52)$$

В явном виде действие элементов l_{ij}^+ на элементы t_{nm}, задаваемое (50), выглядит так:

$$\begin{array}{llll} l_{11}^+(t_{11}) = q, & l_{11}^+(t_{22}) = 1, & l_{11}^+(t_{33}) = 1, & l_{11}^+(t_{44}) = q^{-1}, \\ l_{12}^+(t_{21}) = \lambda, & l_{12}^+(t_{43}) = -\lambda q^{-1}, & l_{13}^+(t_{31}) = \lambda, & l_{13}^+(t_{42}) = \lambda q^{-3}, \\ l_{14}^+(t_{41}) = \lambda, & l_{22}^+(t_{11}) = 1, & l_{22}^+(t_{22}) = q, & l_{22}^+(t_{33}) = q^{-1}, \\ l_{22}^+(t_{44}) = 1, & l_{23}^+(t_{32}) = \lambda(1+q^{-2}), & l_{24}^+(t_{31}) = \lambda q^{-3}, & l_{33}^+(t_{11}) = 1, \\ l_{33}^+(t_{22}) = q^{-1}, & l_{33}^+(t_{33}) = q, & l_{33}^+(t_{44}) = 1, & l_{34}^+(t_{43}) = \lambda, \\ l_{44}^+(t_{11}) = q^{-1}, & l_{44}^+(t_{22}) = 1, & l_{44}^+(t_{33}) = 1, & l_{44}^+(t_{44}) = q. \end{array}$$

Остальные элементы вида $l^{+}_{ij}(t_{kn})$ равны нулю. В явном виде действие элементов l^{-}_{ij} на элементы t_{nm}, задаваемое (50), выглядит так :

$$\begin{array}{llll}
l^{-}_{11}(t_{11}) = q^{-1}, & l^{-}_{11}(t_{22}) = 1, & l^{-}_{11}(t_{33}) = 1, & l^{-}_{11}(t_{44}) = q, \\
l^{-}_{21}(t_{12}) = -\lambda, & l^{-}_{21}(t_{34}) = \lambda q, & l^{-}_{31}(t_{13}) = -\lambda, & l^{-}_{31}(t_{24}) = -\lambda q^3, \\
l^{-}_{41}(t_{14}) = -\lambda, & l^{-}_{22}(t_{11}) = 1, & l^{-}_{22}(t_{22}) = q^{-1}, & l^{-}_{22}(t_{33}) = q, \\
l^{-}_{22}(t_{44}) = 1, & l^{-}_{32}(t_{23}) = -\lambda(1+q^2), & l^{-}_{42}(t_{13}) = -\lambda q^3, & l^{-}_{33}(t_{11}) = 1, \\
l^{-}_{33}(t_{22}) = q, & l^{-}_{33}(t_{33}) = q^{-1}, & l^{-}_{33}(t_{44}) = 1, & l^{-}_{43}(t_{34}) = -\lambda, \\
l^{-}_{44}(t_{11}) = q, & l^{-}_{44}(t_{22}) = 1, & l^{-}_{44}(t_{33}) = 1, & l^{-}_{44}(t_{44}) = q^{-1}.
\end{array}$$

Остальные элементы вида $l^{-}_{ij}(t_{kn})$ равны нулю.

Коммутационные и дополнительные соотношения для образующих алгебры $sp_q(2;j)$ задаются

$$\begin{aligned}
R^{(+)}L^{(\varepsilon)}_1(j)L^{(\varepsilon)}_2(j) &= L^{(\varepsilon)}_2(j)L^{(\varepsilon)}_1(j)R^{(+)}, && (53)\\
R^{(+)}L^{(+)}_1(j)L^{(-)}_2(j) &= L^{(-)}_2(j)L^{(+)}_1(j)R^{(+)}, && (54)\\
L(j)C^tL^t(j)(C^{-1})^t &= C^tL^t(j)(C^{-1})^tL(j) = I, && (55)
\end{aligned}$$

где $L^{(\varepsilon)}_1(j) = L^{(\varepsilon)}(j)\otimes I, \quad L^{(\varepsilon)}_2(j) = I\otimes L^{(\varepsilon)}(j), \quad \varepsilon = \pm$. Конкретно:

$$\begin{gathered}
ql^{+}_{11}l^{+}_{1k} = R^{11}_{kk}l^{+}_{1k}l^{+}_{11}, \quad l^{+}_{11}l^{+}_{23} = l^{+}_{23}l^{+}_{11}, \quad l^{+}_{11}l^{-}_{32} = l^{-}_{32}l^{+}_{11}, \\
l^{+}_{11}l^{-}_{21} = ql^{-}_{21}l^{+}_{11}, \quad l^{+}_{11}l^{-}_{31} = ql^{-}_{31}l^{+}_{11}, \quad l^{+}_{11}l^{-}_{41} = q^2l^{-}_{41}l^{+}_{11}, \\
l^{\pm}_{11}l^{\pm}_{kk} = l^{\pm}_{kk}l^{\pm}_{11}, \quad k = 1,\ldots,4, \\
ql^{+}_{22}l^{-}_{21} = l^{-}_{21}l^{+}_{22}, \quad l^{+}_{22}l^{-}_{32} = q^2l^{-}_{32}l^{+}_{22}, \quad l^{+}_{22}l^{-}_{31} = ql^{-}_{31}l^{+}_{22}, \quad [l^{+}_{22}, l^{-}_{41}] = 0, \\
l^{+}_{22}l^{+}_{12} = ql^{+}_{12}l^{+}_{22}, \quad q^2l^{+}_{22}l^{+}_{23} = l^{+}_{23}l^{+}_{22}, \quad ql^{+}_{22}l^{+}_{13} = l^{+}_{13}l^{+}_{22}, \quad [l^{+}_{22}, l^{+}_{14}] = 0, \\
[l^{+}_{12}, l^{-}_{21}] = \lambda(l^{+}_{11}l^{-}_{22} - l^{-}_{11}l^{+}_{22}), \quad [l^{+}_{13}, l^{-}_{31}] = \lambda(l^{+}_{11}l^{+}_{22} - l^{-}_{11}l^{-}_{22}), \\
[l^{+}_{23}, l^{-}_{32}] = \tilde{\lambda}(l^{+}_{22}l^{+}_{22} - l^{-}_{22}l^{-}_{22}), \quad ql^{+}_{23}l^{+}_{12} - l^{+}_{12}l^{+}_{23} = \tilde{\lambda}l^{+}_{13}l^{+}_{22}, \\
ql^{-}_{32}l^{-}_{21} - l^{-}_{21}l^{-}_{32} = \tilde{\lambda}l^{-}_{31}l^{-}_{22}, \\
l^{+}_{13}l^{+}_{12} - q^2l^{+}_{12}l^{+}_{13} = \lambda l^{+}_{14}l^{+}_{11}, \quad [l^{+}_{12}, l^{-}_{31}] = \lambda l^{-}_{32}l^{+}_{11}, \\
ql^{+}_{12}l^{+}_{14} = l^{+}_{14}l^{+}_{12}, \quad l^{+}_{12}l^{-}_{32} = ql^{-}_{32}l^{+}_{12}, \quad ql^{+}_{23}l^{-}_{21} = l^{-}_{21}l^{+}_{23}, \quad ql^{+}_{13}l^{+}_{14} = l^{+}_{14}l^{+}_{13}. \qquad (56)
\end{gathered}$$

Копроизведение и коединица определяется в матричном виде обычным образом:

$$\triangle(L^{\pm}(j)) = L^{\pm}(j)\dot{\otimes}L^{\pm}(j), \qquad \epsilon(L^{\pm}(j)) = I. \qquad (57)$$

Антипод равен:

$$S(L^{(+)}(j)) = \begin{pmatrix} l_{44}^{+} & j^{-1}ql_{34}^{+} & -j^{-1}q^{3}l_{24}^{+} & -q^{4}l_{14}^{+} \\ 0 & l_{33}^{+} & -q^{2}l_{23}^{+} & -j^{-1}q^{3}l_{13}^{+} \\ 0 & 0 & l_{22}^{+} & j^{-1}ql_{12}^{+} \\ 0 & 0 & 0 & l_{11}^{+} \end{pmatrix}, \qquad (58)$$

$$S(L^{(-)}(j)) = \begin{pmatrix} l_{44}^{-} & 0 & 0 & 0 \\ j^{-1}q^{-1}l_{43}^{-} & l_{33}^{-} & 0 & 0 \\ -j^{-1}q^{-3}l_{42}^{-} & -q^{-2}l_{32}^{-} & l_{22}^{-} & 0 \\ -q^{-4}l_{41}^{-} & -j^{-1}q^{-3}l_{31}^{-} & j^{-1}q^{-1}l_{21}^{-} & l_{11}^{-} \end{pmatrix}. \qquad (59)$$

Установим изоморфизм между алгеброй $sp_q(2;j)$ и универсальной обертывающей алгеброй $U_z(sp(2;j))$. Изоморфизм выглядит следующим образом:

$$l_{11}^{+} = e^{z\widetilde{H}_1}, \quad l_{22}^{+} = e^{z\widetilde{H}_2}, \qquad (60)$$

$$l_{12}^{+} = \lambda q^{-\frac{1}{2}} X_1^{+} e^{\frac{z}{2}(\widetilde{H}_1+\widetilde{H}_2)}, \quad l_{21}^{-} = \lambda q^{\frac{1}{2}} X_1^{-} e^{-\frac{z}{2}(\widetilde{H}_1+\widetilde{H}_2)} \qquad (61)$$

$$l_{23}^{+} = \lambda\sqrt{q+q^{-1}}X_2^{+}, \quad l_{32}^{-} = \lambda\sqrt{q+q^{-1}}X_2^{-} \qquad (62)$$

$$H_1 = \tilde{H}_1 - \tilde{H}_2, \qquad H_2 = 2\tilde{H}_2$$

. Остальные образующие могут быть получены из дополнительных соотношений (55):

$$\begin{aligned} l_{13}^{+} &= (\widetilde{\lambda})^{-1}(ql_{23}^{+}l_{12}^{+} - l_{12}^{+}l_{23}^{+})l_{22}^{-}, & l_{31}^{-} &= (\widetilde{\lambda})^{-1}(ql_{32}^{-}l_{21}^{-} - l_{21}^{-}l_{32}^{-})l_{22}^{+}, \\ l_{14}^{+} &= j^{-2}\lambda^{-1}(l_{13}^{+}l_{12}^{+} - q^{2}l_{12}^{+}l_{13}^{+})l_{11}^{-}, & l_{41}^{-} &= j^{-2}\lambda^{-1}(l_{31}^{-}l_{21}^{-} - q^{2}l_{21}^{+}l_{31}^{+})l_{11}^{+}, \\ l_{34}^{+} &= -l_{12}^{+}l_{11}^{-}l_{22}^{-}, & l_{43}^{-} &= -l_{21}^{-}l_{11}^{+}l_{22}^{+}, \end{aligned}$$

$$l_{ii}^{+} = l_{i'i'}^{-}, \quad l_{ii}^{-} = (l_{ii}^{+})^{-1}, \quad i = 1,\cdots,4, \quad \widetilde{\lambda} = q^2 - q^{-2}. \qquad (63)$$

Формулы (34) полностью определяют структуру универсальной обертывающей алгебры $U_z(sp(2;j))$. При $j = \iota$ $(\iota^2 = 0)$, получаем новую неполупростую алгебру.

Список литературы

[1] Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантование групп и алгебр Ли // Алгебра и анализ.—1989.—Т.1.Вып.1.—С.178-206.

[2] Громов Н.А. Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. — Сыктывкар: Коми НЦ, 1990.